

[研究·设计]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2017.04.009

基于连续小线段曲率连续全局光顺算法

李东, 张立强, 陈阳

(上海工程技术大学机械工程学院, 上海 201600)

摘要:小线段所描述的曲线轨迹在相邻线段的转角处,由于在切线方向会发生突变,曲率也不连续,从而导致了刀具加工中,在通过转角处时会发生速度波动和加速度突变。笔者提出一种基于三次B样条插值拟合的连续小线段路径全局光顺算法,对满足转角和弓高误差约束的连续小线段进行插值拟合,使拟合刀具路径达到 G^2 连续,从而有效提高进给速度,改善加工质量,提高加工效率。最后通过仿真实验验证了本文中算法是有效的。

关键词:曲线加工;插值拟合;全局光顺;B样条插值; G^2 连续

中图分类号:TH164;TP273

文献标志码:A

文章编号:1005-2895(2017)04-0044-04

Research on Continuous Global Fairing Algorithm Based on Continuous Small Curvature

LI Dong, ZHANG Liqiang, CHEN Yang

(School of Mechanical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

Abstract: The tool path described for small segments are discontinuous at the corners of adjacent segments due to abrupt changes in the tangential direction, which will lead to speed fluctuations and abrupt acceleration in the tool processing through the corner. In this paper, a global smoothing algorithm for continuous small line segments based on cubic B-spline interpolation was proposed. The interpolation of small continuous line segments should satisfy the constraints of corner and bow height errors, so that the tool path could reach G^2 continuous, which could effectively improve the feed rate, improve the processing quality, as well as improve processing efficiency. Finally, the simulation results showed that the algorithm was effective.

Keywords: curve machining; interpolation and fitting; global smoothing; B-spline interpolation; G^2 continuous

目前,针对复杂曲线曲面的加工,传统加工曲线轨迹的方法是按照一定的精度要求,将曲线离散成一系列首尾相接的小线段,来逼近原始刀具的轨迹曲线。由于该算法简单高效且适用范围广,已经成为曲面加工的主要流程。随着高速加工技术在现代工业中的发展,要求数控机床具有高的进给速度和加速度以保证高的加工效率,但小线段所描述的曲线轨迹在相邻线段的拐角处,其切线方向会发生突变,曲率也不连续,这就导致了刀具行进中,在通过拐角处时会发生速度波动和加速度突变,从而引起工艺系统的振动与冲击^[1]。大量研究表明对连续小线段路径进行光顺是解决上述问题的有效手段。

针对线性刀具路径的光顺,目前一般使用各种曲

线对现有的轨迹进行合并与调整,以达到一定连续性条件。按照对刀具路径调整的方式不同,可分为局部光顺与全局光顺。局部光顺主要通过利用其它曲线来替代原有线性轨迹中的转角来实现光顺的目的,是一种广泛使用的方法。简单的过渡曲线包括圆弧^[2]、Ferguson曲线^[3-4]等,采用这种过渡曲线的光顺方法实现了相邻线段之间的 G^1 连续。但是,具有 G^1 连续性的轨迹仅保证曲线全长范围内的切向连续变化,曲率的不连续性依然会造成沿轨迹垂直方向的加速度发生突变,因此,为实现更加平稳的转角过渡,具备 G^2 以上光顺性的曲线是更好的选择。常采用的具备 G^2 光顺性的曲线线型包括多项式曲线^[5]、Bézier曲线^[6]、Pythagorean Hodograph (PH)曲线^[7]、B样条曲线

收稿日期:2016-12-06;修回日期:2017-02-25

第一作者简介:李东(1992),男,河南开封人,硕士研究生,主要研究方向为数控加工技术。E-mail:lidong50539@163.com

等^[8]。研究表明,局部转角光顺可以对任意 2 条不共线的相邻线段转角进行光顺,适应性好,但是局部转角光顺对于短而数量多的密集线段路径和转角很小的平缓路径进行线性路径光顺时,效果不太明显,而全局光顺对该 2 种线性路径光顺处理有优势。任锬等^[9]采用三次多项式曲线对轨迹进行拟合,并依据曲线的曲率变化动态调整进给速度,以实现自适应插补;Erkorkmaz 等^[10]依据离散点计算出用于曲线构造的边界条件,利用五次多项式曲线对离散刀位点进行拟合。Yau 等人^[11]以连续小线段作为筛选条件,利用 Bézier 曲线实现相邻三段连续线段的拟合,但这种方法不能保证 2 条 Bézier 曲线衔接处是否切向连续。Wang 等人在 Yau 工作的基础上,实现了利用 NURBS 曲线对小线段进行在线拟合^[12]。

针对上述问题,笔者提出了一种基于三次 B 样条插值拟合的连续小线段路径全局光顺算法,对满足转角和双边弓高误差约束的连续小线段进行插值拟合,使拟合刀具路径达到 G² 连续,从而有效提高进给速度,改善加工质量,提高加工效率。

1 G² 连续 B 样条全局拟合光顺

1.1 B 样条定义

k 次 B 样条曲线定义如下:

$$r(u) = \sum_{i=0}^n d_i N_{i,k}(u), 0 \leq u \leq 1. \quad (1)$$

其中:
$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{否则;} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u); \quad (3)$$

$$U = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{k+1}, u_{k+1}, \dots, u_{m-k-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k+1} \right\}, m = n + k + 1. \quad (4)$$

式中: {d_i} 是控制点 (i=0, 1, ..., n), 也称为德布尔点, u 是曲线的参数, U 为节点矢量, {N_{i,k}(u)} 为定义在节点矢量 U 上的 k 次 B 样条基函数。

三次 Bézier 曲线表达式为

$$r(t) = (1 - u)^3 d_0 + 3u(1 - u)^2 d_1 + 3u^2(1 - u) d_2 + u^3 d_3. \quad (5)$$

1.2 误差约束

在对 B 样条曲线拟合前,为了获取更高的加工精度,需对拟合的连续小线段进行检验,检查是否满足转角误差 θ_{critical} 与弓高误差 ε_{max} 的约束。

1) 转角约束

如图 1 所示, d_{k-1} = {x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}}, d_k = {x_k, y_k,

z_k}, d_{k+1} = {x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}}, 则相邻线段 $\overrightarrow{d_{k-1}d_k}$ 与 $\overrightarrow{d_kd_{k+1}}$ 的转角为:

$$\theta_k = \cos^{-1} \left(\frac{\overrightarrow{d_{k-1}d_k} \cdot \overrightarrow{d_kd_{k+1}}}{|\overrightarrow{d_{k-1}d_k}| |\overrightarrow{d_kd_{k+1}}|} \right). \quad (6)$$

为达到拟合曲线对转角的要求,要求 θ_k ≤ θ_{critical}。

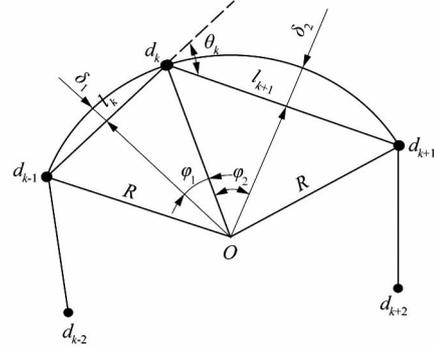


图 1 计算双边弓高误差

Figure 1 Calculation of bi-chord errors

2) 弓高误差约束

如图 1 所示, Φ₁ + Φ₂ = θ_k, 2 个相邻的小线段长度分别为 l_k = || d_{k-1}d_k ||, l_{k+1} = || d_kd_{k+1} ||。采用三点圆弧法计算弓高误差,可得双边弓高误差 δ₁ 和 δ₂ 为:

$$\delta_1 = R(1 - \cos \Phi_1), \quad (7)$$

$$\delta_2 = R(1 - \cos \Phi_2) = R(1 - \cos (\theta_k - \Phi_1)). \quad (8)$$

其中: $R = \frac{l_k}{2 \sin \Phi_1}, \Phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{l_k \sin \theta_k}{l_{k+1} + l_k \cos \theta_k} \right)$ 。

根据式(7) ~ (8)可计算出相邻弓高误差 δ₁ 和 δ₂, 要求必须同时小于最大弓高误差 ε_{max}, 若不满足, 则此插补点即为断点, 不能进行 B 样条拟合。

2 构造 G² 连续 B 样条全局拟合光顺模型

2.1 构造单位切矢

如图 2 所示, {d_k}, k=0, ..., n, 代表 n 条连续小线段的端点, 采用插值拟合的方法构造出 n 条曲线 r_k(u), k=1, ..., n, 近似替代线段 d_{k-1}d_k, d_{k-1} 和 d_k 是 B 样条曲线 r_k(u) 的端点。

要将连续小线段拟合成 G² 连续的样条曲线, 要确保 r_k(u) 和 r_{k+1}(u) 在 d_k 处的切矢相同, 即达到 G¹ 连续。再根据文献[6]构造端点 d_k 处的切矢 V_k。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_k &= d_k - d_{k-1}, (k=1, \dots, n); \\ \mathbf{q}_0 &= 2\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_{-1} = 2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1; \\ \mathbf{q}_{n+1} &= 2\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{n-1}, \mathbf{q}_{n+2} = 2\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\mathbf{V}_k = (1 - \alpha_k) \mathbf{q}_k + \alpha_k \mathbf{q}_{k+1}, k=0, \dots, n. \quad (10)$$

式中:

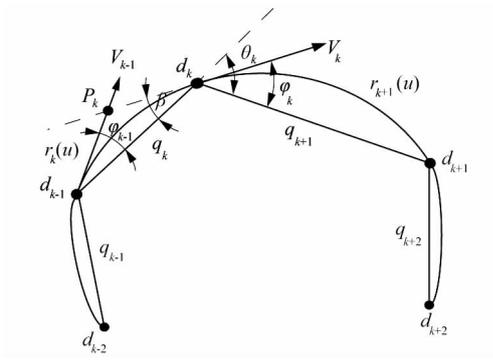


图2 构造单位切矢

Figure 2 Calculation of tangent vectors

$$\alpha_k = \frac{|\mathbf{q}_{k-1} \times \mathbf{q}_k|}{|\mathbf{q}_{k-1} \times \mathbf{q}_k| + |\mathbf{q}_{k+1} \times \mathbf{q}_{k+2}|}, k=0, \dots, n. \quad (11)$$

且当 $d_{k-2}, d_{k-1}, d_k, d_{k+1}, d_{k+2}$ 共线时,分母为零,此时 α_k 取 0.5,则 $\mathbf{V}_k = 0.5 \cdot (\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k+1})$ 。

则 d_k 处的单位切矢 \mathbf{T}_k 为

$$\mathbf{T}_k = \frac{\mathbf{V}_k}{|\mathbf{V}_k|}, k=0, \dots, n. \quad (12)$$

2.2 构造三次 Bézier 曲线

采用三次 B 样条拟合,每条曲线段 $r_k(u)$ 都是一条三次 Bézier 曲线,构造三次 Bézier 曲线需要 4 个控制点,其中首尾点已经给定, $B_{k0} = d_{k-1}, B_{k3} = d_k$,下面求取中间控制点 B_{k1} 与 B_{k2} ,使得相邻 Bézier 曲线衔接处曲率连续。

如图 2 所示, d_{k-1} 点处的切矢 \mathbf{V}_{k-1} 与矢量 \mathbf{q}_k 的夹角为 φ_{k-1} , d_k 点处的切矢 \mathbf{V}_k 与矢量 \mathbf{q}_{k+1} 的夹角为 φ_k , \mathbf{q}_k 与 \mathbf{q}_{k+1} 的转角 θ_k 由式(6)计算。记切矢 \mathbf{V}_{k-1} 所在直线与切矢 \mathbf{V}_k 所在直线交点为 P_k ,下面求取点 P_k 。记 $\|d_{k-1}P_k\| = v_{k-1}$,则 v_{k-1} 的求解公式为:

$$v_{k-1} = \frac{l_k \sin \beta}{\sin(\pi - \varphi_{k-1} - \beta)} = \frac{l_k \sin(\theta_k - \varphi_k)}{\sin(\pi - \varphi_{k-1} - \theta_k + \varphi_k)} \quad (13)$$

其中:

$$\begin{aligned} \varphi_{k-1} &= \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{q}_k}{|\mathbf{T}_{k-1}| |\mathbf{q}_k|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{q}_k}{l_k} \right), \\ \varphi_k &= \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{T}_k \mathbf{q}_{k+1}}{|\mathbf{T}_k| |\mathbf{q}_{k+1}|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{T}_k \mathbf{q}_{k+1}}{l_{k+1}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

则得到三次 Bézier 曲线 $r_k(u)$ 的 4 个控制点:

$$\left. \begin{aligned} B_{k0} &= d_{k-1}; \\ B_{k1} &= d_{k-1} + v_{k-1} \mathbf{T}_{k-1}; \\ B_{k2} &= d_{k-1} + v_{k-1} \mathbf{T}_{k-1}; \\ B_{k3} &= d_k \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

若三次 B 样条上任意一段曲线 $r_k(u)$ 是由 $B_{k0} = d_{k-1}, B_{k3} = d_k, B_{k1} = B_{k2} = P_k$ 4 个控制点定义的三次 Bézier 曲线,则三次 B 样条满足 G^2 连续。

2.3 G^2 连续三次 B 样条轨迹生成

在每 2 个点 d_k, d_{k+1} 及其切矢可以构造一个三次 Bézier 曲线 $r_k(u)$, $r_k(u)$ 控制点由式(15)表示,因此,若线性刀具路径上所有线段都满足,则 $(n+1)$ 个插值点 $\{d_k\} (k=0, \dots, n)$ 可以生成 n 个三次 Bézier 曲线,且达到 G^2 连续,为使这 n 个三次 Bézier 曲线段构成一条 B 样条,计算 B 样条的控制节点,步骤如下:

- 1) 令 $\bar{u}_0 = 0$ 。
- 2) $\bar{u}_{k+1} = \bar{u}_k + 3 \|B_{k1} - B_{k0}\|, k=0, 1, \dots, n-1$ 。
- 3) 节点单位化:

$$u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0;$$

$$u_{2(k+1)} = u_{2(k+1)+1} = \frac{\bar{u}_k}{\bar{u}_n}, 1 \leq k \leq n-1;$$

$$u_{2n+2} = u_{2n+3} = u_{2n+4} = u_{2n+5} = 1。$$

这条 G^2 连续 B 样条曲线,控制点如下:

$$d_0, B_{(1)1}, B_{(1)2}, B_{(2)1}, B_{(2)2}, \dots, B_{(n-1)1}, B_{(n-1)2}, d_n \quad (16)$$

控制节点:

$$\mathbf{U} = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_n}, \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_n}, \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_n}, \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_n}, \dots, \frac{\bar{u}_{n-1}}{\bar{u}_n}, \frac{\bar{u}_{n-1}}{\bar{u}_n}, 1, 1, 1, 1 \right\} \quad (17)$$

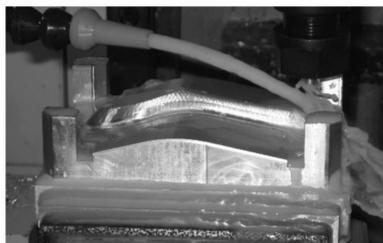
如果线性路径中有不满足转角误差或弓高误差判断的线段,则在该线段末端点设置断点,相邻 2 个断点之间的线段利用上述方法同样可拟合成 G^2 连续的 B 样条。

为了保证轨迹精度,需对生成的 B 样条路径进行精度校验,将不满足精度的点设为断点。

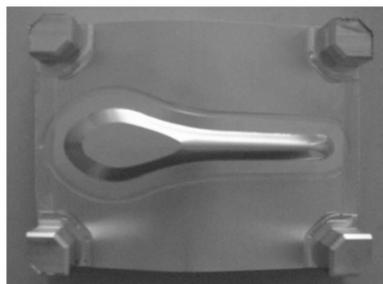
3 仿真与实验

以三轴数控铣床 XK714 作为实验平台,配备自主开发的嵌入式 PC 的开放式数控系统,该数控系统是基于 Windows2000 操作系统与实时包的软件平台,算法模块可方便地嵌入其中。如图 3 所示,以勺子模具的凸模为实验对象,如图 3 所示。对勺模的三轴精加工刀路用 2 种方法进行插补。方法 1:基于 S 曲线加减速策略前瞻速度平滑的线性路径直接插补方法。方法 2:先采用本章全局光顺算法对线性路径进行光顺处理,再基于 S 曲线加减速策略前瞻速度平滑,线性插补和样条插补混合插补方法。在该实验中,工件材料是铝合金,刀具采用的是 6 mm 硬质合金球头刀。试验中,数控系统的插补周期 t 为 0.004 s。XYZ 各轴最

大进给速度为 $4\ 000\ \text{mm}/\text{min}$,最大加速度为 $1.8 \times 10^6\ \text{mm}/\text{min}^2$,最大跃度为 $1.35 \times 10^9\ \text{mm}/\text{min}^3$,指令进给速度为 $3\ 000\ \text{mm}/\text{min}$ 。另外,采用方法 2 时,最大拟合段数设定为 50,以及转角准则设为 20° ,弓高误差准则设置为 $0.001\ \text{mm}$ 。下面结合图 4 对比分析 2 种插补方法的优缺点。



(a) 位置 1



(b) 位置 2

图 3 在三轴机床上加工勺模

Figure 3 Machining a scoop mold on three-axis machine tool

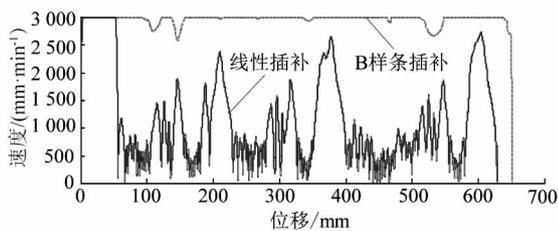


图 4 2 种算法的速度曲线

Figure 4 Speed curve of two interpolation methods

图 4 为用 2 种插补方法生成的速度曲线。由图 4 可知,采用方法 1 插补时,由于线段很短且转角不连续,生成的速度曲线波动较大,且很难达到指令进给速度;采用本章算法时,由于 G^2 连续 B 样条全局拟合算法有效地对连续小线段路径进行压缩和光顺,生成的速度曲线更加平滑,接近指令进给速度 $3\ 000\ \text{mm}/\text{min}$ 。

4 结论

笔者提出了一种基于三次 B 样条插值拟合的连续小线段路径全局光顺算法,用以解决数控加工中的

一阶线性不连续刀具路径的问题。首先,针对线性刀具路径进行转角与弓高误差进行约束,再利用 B 样条对满足判据的连续小线段进行插值拟合,生成 G^2 连续的三次 B 样条,最后通过实验模型的验证表明:该算法能够有效提高进给速度,减少刀具速度波动与加速度突变,从而提高零件加工效率,并减少工艺系统的振动,适用于实际数控机床加工中。

参考文献:

- [1] 金荣益,竺韵德,李国平. 基于 Hamming 法的新型 NURBS 曲线插补算法研究[J]. 机电工程,2016,33(4):406-410.
- [2] 张得礼,周末水. 数控加工运动的平滑处理[J]. 航空学报,2006,27(1):125-130.
- [3] ZHANG Libing, YOU Youpeng, HE Jun, et al. The transition algorithm based on parametric spline curve for high-speed machining of continuous short line segments [J]. International journal of advanced manufacturing technology, 2011, 52(1):245-254.
- [4] 何均,游有鹏,王化明. 面向微线段高速加工的 Ferguson 样条过渡算法[J]. 中国机械工程,2008,19(17):2085-2089.
- [5] ERKORKMAZ K, YEUNG C H, ALTINTAS Y. Virtual CNC system Part II: high speed contouring application[J]. International journal of machine tools and manufacture, 2006, 46(10):1124-11383.
- [6] BI Qingzhen, WANG Yuhan, ZHU Limin, et al. A practical continuous-curvature Bézier transition algorithm for high-speed machining of linear tool path [C]//4th International Conference, ICIRA 2011: Intelligent robotics and applications. Aachen, Germany: Springer-Verlag Berlin, 2011:465-476.
- [7] JAHANPOUR J, TSAI M C, CHENG M Y. High-speed contouring control with NURBS-based C^2 PH spline curves [J]. International journal of advanced manufacturing technology, 2010, 49(5):663-674.
- [8] ZHAO Huan, ZHU Limin, DING Han. A real-time look-ahead interpolation methodology with curvature-continuous B-spline transition scheme for CNC machining of short line segments [J]. International journal of machine tools and manufacture, 2013, 65:88-98.
- [9] 任磊,傅建中,陈子辰. 高速加工中速度前瞻控制新算法研究[J]. 浙江大学学报(工学版),2007,40(11):1985-1988.
- [10] ERKORKMAZ K, ALTINTAS Y. High speed CNC system design Part I: jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation [J]. International journal of machine tools and manufacture, 2001, 41(9):1323-1345.
- [11] YAU Hongzong, WANG Junbin. Fast Bezier interpolator with real-time lookahead function for high-accuracy machining [J]. International journal of machine tools and manufacture, 2007, 47(10):1518-1529.
- [12] WANG Junbin, YAU Hongzong. Real-time NURBS interpolator: application to short linear segments [J]. International journal of advanced manufacturing technology, 2009, 41(11):1169-1185.