[新设备·新材料·新方法]
DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2018.03.014

简支复合矩形对称层合板的近似分析法

陈栋栋[1]，吴明格[2]，胡　凯[1]，陈　健[1]

(1.浙江省特种设备检验研究院，浙江 杭州　310020；2.温州大学 机电工程学院，浙江 温州　325035)

摘　要:为了研究一般简支对称层合板近似求法适用性问题,依据Ritz法、最小势能原理经代数转化获得便于MATLAB编程的力学解析解;不同长宽比A_R与铺层角度θ下,正交与10%原则设计层合板通过有限元法(FEM)、正交长层合板近似(OLA)、正交层合板近似(OA)得到值和解析解对比。结果表明:FEM法与解析解中面最大位移值w^0误差在5%以内,随A_R增大,两者误差趋于稳定并一致;正交板在低弯曲刚度D_{11}下,OLA法在临界A_R处w^0误差达294.4%,而大A_R下,OLA与解析解结果一致;10%原则板在A_R大于3时,FEM和OA法得到w^0与解析解一致,A_R小于3时,两近似法符合工程需求,但大弯扭耦合D_{16},D_{26}下,在$A_R=1,2$,$\theta=90°$时,误差为10.98%,8.67%,相较于解析解有较大误差。研究结果为复合材料结构设计阶段提供了一定的参考。

关　键　词:对称层合板;不同长宽比;解析解;有限元法;正交长层合板近似;正交层合板近似

中图分类号:V214.8　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1005-2895(2018)03-0073-06

Approximate Analysis of Simple Support Symmetric Rectangular Laminated Plates

CHEN Dongdong[1], WU Mingge[2], HU Kai[1], CHEN Jian[1]

(1. Zhejiang Provincial Special Equipment Inspection and Research Institute, Hangzhou 310020, China;
2. College of Mechanical and Electrical Engineering, Wenzhou University, Wenzhou, Zhejiang 325035, China)

Abstract: In order to analyze the approximate applicability of general simple-supported symmetric laminated plates, according to the Ritz method and the minimum potential energy principle, the closed form solution of the laminated plates was obtained after the algebraic manipulations and matrix transformation, which was convenient for MATLAB programming. Values about the orthotropic laminate and the 10% rule laminate, obtained through the orthotropic laminated plate approximation (OA), the finite element method (FEM), the orthotropic long-plate laminate approximation (OLA), were compared with the value of exact solution, under different aspect ratio A_R and ply angle θ. The result shows that maximum displacement w^0 of FEM is within 5% errors compared with exact solution. As the aspect ratio A_R increases, the error tends to be stable and consistent. Under the low bending stiffness D_{16}, OLA w^0 at the critical A_R is 294.4% errors compared with exact solution about the orthotropic laminate, while w^0 is consistent at the large A_R ratio. For the 10% rule laminates, as A_R is getting greater than 3, FEM w^0 and OA w^0 are consistent with the exact solution, and as A_R getting less than 3, the w^0 from the prior approximate methods meets the engineering requirements, however, error is large when under the large bending-twist coupling stiffness D_{16}, D_{26}, at $A_R=1$ and 2 with $\theta=90°$, the OA w^0 are 10.98% and 8.67% errors compared with the exact solution w^0. The research has certain directive significance on the design of composite structure.

Keywords: symmetric laminated; different aspect ratio; exact solutions; FEM (finite element method); OLA (orthotropic long-plate laminate approximation); OA (orthotropic laminated plate approximation)

收稿日期:2017-12-01;**修回日期**:2018-03-20

基金项目:浙江省教育厅科研基金(Y201737452)。

第一作者简介:陈栋栋(1987),男,浙江丽水人,硕士研究生,主要研究方向为特种设备检测技术。E-mail:hacklechen@qq.com

复合层合板作为基本结构组件,广泛应用于各工业领域,其复合力学特性研究的准确性是该领域高可靠性设计的前提条件,在概念设计阶段显的极其重要[1]。

各向同性材料矩形层合板梁直接可查工程设计手册获得力学特性解,而复合层合板设计参数多且复杂,几乎不能通过查表形式获得应用解,只能通过数值法获得近似精确解。复合层合板的精确解析解可以在特殊的层合板中获得应用,如正交层合板等[2]。层合板应用的广泛性,成为国内外学者研究的热点,研究成果丰富[3-7]。Timoshenko 和 Krieger 提出正交层合板弯曲刚度满足 Huber 正交关系式的,可以近似利用同向层合板位移解析方程求解[8];Veres 和 Kollar 认为大长宽比层合板也可以合理的近似利用同性板位移解析方程[9]629。正是在前期层合板数值与解析求解研究成果的基础上,研究者对于层合板在不同边界条件和不同求解方法进行了广泛研究。Whitney 将任意层合板简化为正交层合板,指出任意层合板近似解与数值解析解相差超过 25%[10];Tsai 提出 10% 原则层合板性能近似正交层合板等[11];Veres 对不同铺层角度的任意对称层合板基于正交近似、Huber 正交近似与数值解进行对比,指出何种条件下,近似解法适合应用[12]。

课题组基于层合薄板相关假设,将 4 边简支、均布载荷下的正交层合板和 10% 原则设计的 2 类对称复合矩形薄板为对象,研究其分别采用近似解法、解析法和有限元数值解法的挠度结果,并分析适用性。

1 薄壁层压板理论推导

1.1 层合板刚度方程

基于经典层合板理论,层合板刚度方程为

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}。 \tag{1}$$

式中:N_x, N_y, N_{xy} 与 M_x, M_y, M_v 分别为层合板单位宽度内力与内力矩。$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ 与 k_x, k_y, k_{xy} 为层合板中面应变与弯曲、扭曲率,且 $\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y}, \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}, k_x = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}, k_y = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}, k_{xy} = -\frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}$(其中 u^0, v^0, w^0 为层合板中面位移);A_{ij} 为拉伸刚度系数;B_{ij} 为耦合刚度系数;D_{ij} 为弯曲刚度系数,且有

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{ij}}(1, z, z^2)\,\mathrm{d}z, i, j = 1, 2, 6。 \tag{2}$$

式中:h 为层合板厚度;z 为单层板到层合板中面距离;$\overline{Q_{ij}}$ 为降刚度系数。

1.2 层合板应变能与外力功

矩形层合板外力作用下产生应变,应变能

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\int_{h_b}^{h_t}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy})\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x。 \tag{3}$$

式中:L_x, L_y, h_t, h_b 分别为矩形层合板宽度、长度、顶部与底部对中面距离。

层合板面内应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 与应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 关系为:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}; \tag{4}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\overline{Q_{ij}}]\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}。 \tag{5}$$

将式(1),(2),(4),(5)联立代入式(3)得

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}x。 \tag{6}$$

外力作用在层合板上的功

$$\Omega = -\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}(pw^0)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x。 \tag{7}$$

式中,p 为层合板受外载均布横向载荷。

1.3 Ritz 法与最小势能原理求位移解

通过满足边界条件的 Ritz 法来求解层合板的力学特性。层合板基本情况如图 1 所示。

其边界条件处中面位移 w^0 可表示为

$$w^0 = 0 \quad 当 \quad \left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ 且 } 0 \leqslant y \leqslant L_y; \\ x = L_x \text{ 且 } 0 \leqslant y \leqslant L_y; \\ 0 \leqslant x \leqslant L_x \text{ 且 } y = 0; \\ 0 \leqslant x \leqslant L_x \text{ 且 } y = L_y。 \end{array}\right\} \tag{8}$$

可满足边界条件的表达式为

$$w^0 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} w_{ij}\sin\frac{i\pi x}{L_x}\sin\frac{i\pi y}{L_y}。\tag{9}$$

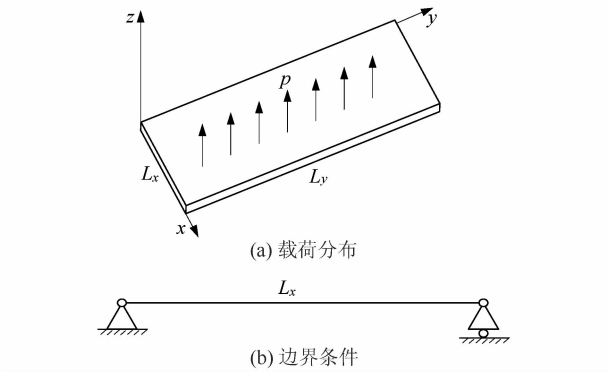


图 1　矩形层合板边界条件与载荷分布

Figure 1　Boundary condition and load distribution of rectangular laminated plate

根据最小势能原理求常量 w_{ij},有

$$\frac{\partial(\Omega+U)}{\partial w_{ij}}=0。\tag{10}$$

对称薄壁层合板 $\varepsilon_x^0,\varepsilon_y^0,\gamma_{xy}^0$ 与耦合刚度 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 为 0,式(6)简化为

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\{k_x \quad k_y \quad k_{xy}\}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy}\end{Bmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}x。\tag{11}$$

代入弯曲与扭曲率表达式,式(11)有

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\right)^2 + D_{66}\left(\frac{2\partial^2 w^0}{\partial x\partial y}\right)^2 + 2\left(D_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + D_{16}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\frac{2\partial^2 w^0}{\partial x\partial y} + D_{26}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\frac{2\partial^2 w^0}{\partial x\partial y}\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}x。\tag{12}$$

为了便于 MATLAB 等商业软件编程数值求解,将式(9)代入式(12)经微分、代数处理后,可得

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} G_{mnij}w_{ij} = p_{mn},\begin{cases} i,m = 1,2,3,\cdots,I; \\ j,n = 1,2,3,\cdots,J。\end{cases}\tag{13}$$

简化上述方程,引入记号,得

$$k = (i-1)J + j,\begin{cases} i = 1,2,3,\cdots,I, \\ j = 1,2,3,\cdots,J。\end{cases}\tag{14}$$

$$l = (m-1)J + n,\begin{cases} m = 1,2,3,\cdots,I, \\ n = 1,2,3,\cdots,J。\end{cases}\tag{15}$$

代入式(14),(15)至式(13),得

$$\sum_{k=1}^{I\times J} G_{kl}w_k = p_l, l = 1,2,3,\cdots,I\times J。\tag{16}$$

式中,

$$p_l = \begin{cases}\dfrac{4pL_xL_y}{\pi^2 mn}, mn\text{ 为奇数}, \\ 0, mn\text{ 为偶数}。\end{cases}\tag{17}$$

$$G_{kl} = G_{lk} = \frac{1}{4}L_xL_y\pi^4\left[D_{11}\left(\frac{i}{L_x}\right)^4 + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\left(\frac{i}{L_x}\right)^2\left(\frac{i}{L_y}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{i}{L_y}\right)^4\right]\delta_{lk} - 2L_xL_y\pi^4 D_{16}\left[\left(\frac{i}{L_x}\right)^2\left(\frac{m}{L_x}\right)\left(\frac{n}{L_y}\right)r_{im}r_{jn} + \left(\frac{m}{L_x}\right)^2\left(\frac{i}{L_x}\right)\left(\frac{j}{L_y}\right)r_{mi}r_{nj}\right] - 2L_xL_y\pi^4 D_{26}\left[\left(\frac{i}{L_y}\right)^2\left(\frac{m}{L_x}\right)\left(\frac{n}{L_y}\right)r_{im}r_{jn} + \left(\frac{n}{L_x}\right)^2\left(\frac{i}{L_x}\right)\left(\frac{j}{L_y}\right)r_{mi}r_{nj}\right]。\tag{18}$$

式中:

$$\delta_{lk} = \begin{cases}1, k = l, \\ 0, k \neq l;\end{cases}\quad r_{ij} = \begin{cases}\dfrac{2i}{i^2+j^2}\dfrac{1}{\pi}, (i-j)\text{ 为奇数}, \\ 0, (i-j)\text{ 为偶数};\end{cases}$$

I、J 为迭代总数。

式(16)展开为矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1(I\times J)} \\ G_{21} & G_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ G_{(I\times J)1} & & & G_{(I\times J)(I\times J)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{(I\times J)}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{(I\times J)}\end{Bmatrix}。\tag{19}$$

式(19)转换求解,则有

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{(I\times J)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1(I\times J)} \\ G_{21} & G_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ G_{(I\times J)1} & & & G_{(I\times J)(I\times J)}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{(I\times J)}\end{Bmatrix}。\tag{20}$$

式(17)和(18)代入式(20)求得常量 w_{ij} 后,代入式(9)即可求得四边简支对称矩形复合层合板的中面位移解。式(9)进一步转换可求得力矩,即

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy}\end{Bmatrix} = [D]\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy}\end{Bmatrix} = [D]\begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} w_{ij}\left(\frac{i\pi}{L_x}\right)^2\sin\frac{i\pi x}{L_x}\sin\frac{j\pi y}{L_y} \\ \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} w_{ij}\left(\frac{i\pi}{L_y}\right)^2\sin\frac{i\pi x}{L_x}\sin\frac{j\pi y}{L_y} \\ -\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} w_{ij}2\frac{i\pi}{L_y}\frac{j\pi}{L_y}\cos\frac{i\pi x}{L_x}\cos\frac{j\pi y}{L_y}\end{Bmatrix}。\tag{21}$$

式中,[D] 为层合板弯曲刚度矩阵。

经过上述推导,可方便地在 MATLAB 等商业软件中求解四边简支对称层合板数值精确解析解。

2　简支层合板有限元模型及验证

建立不同长宽比的层合板有限元模型,由 ANSYS 进行求解,计算结果跟 MATLAB 求得的解析解进行比对。首先通过对各向同性材料层合板的分析验证有限元模型的有效性;然后对不同的复合层合板模型进行研究,材料参数见表 1。

表 1　铝合金与 T300/934 复合材料性能

Table 1　Properties of aluminum alloy and T300/934 composites

材料	正轴弹性模量 E_1/GPa	横轴弹性模量 E_2/GPa	剪切模量 G_{12}/GPa	泊松比 υ_{12}	铺层厚度 h_0/mm
AL	71.00	71.00	26.70	0.33	0.1
T300/934	148.00	9.65	4.55	0.30	0.1

有限元法(finite element method,FEM)建立各向同性材料矩形层合板的宽度 0.2 m 保持不变,矩形长度根据层合板宽度的 A_R 倍增长;层合板四边界进行简支约束,总共铺设 20 层,厚度为 2 mm,板面受均布力 50 kN。所得最大位移值出现在矩形层合板正中间处,即 $L_x/2$,$L_y/2$ 处;无穷项系数对应的精确解在实际工程应用中不可能实现,考虑截断误差,对式(9)中的 i,j 分别取 25 足以在 MATLAB 计算中获得精确解析解。FEM 与 MATLAB 取得层合板中面正中间处最大位移 w^0 结果如表 2 所示。由表 2 可知,FEM 分析得到结果与解析解接近,最大误差不超过 1%,验证了所建立层合板有限元模型的有效性。

表 2　各向同性层合板 MATLAB 解析解与有限元模型最大位移值 w^0

Table 2　Maximum displacement w^0 of MATLAB exact solution and finite element model of isotropic laminates

长宽比 A_R	MATLAB 解析解/mm	有限元模型最大位移 ω^0/mm	误差 e_{DIFF}/%
1	6.118 3	6.148 5	0.49
2	15.254 7	15.252 0	-0.02
3	18.423 8	18.361 2	-0.34
4	19.306 4	19.253 1	-0.28
5	19.536 3	19.419 4	-0.60
6	19.594 7	19.474 5	-0.61
7	19.610 4	19.487 9	-0.62
8	19.616 5	19.491 1	-0.64
9	19.620 9	19.492 0	-0.66
10	19.625 9	19.492 4	-0.68

3　层合板结构分析

3.1　正交层合板

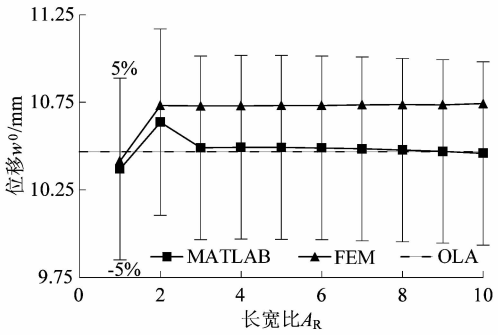
选取 3 种不同铺层类型的正交层合板,各层铺层角度与弯曲刚度如表 3 所示。VERES[9]630 提出简支矩形层合板满足 $\frac{L_y}{L_x} > 3\sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$,可通过查同性材料设计手册,获得对应的力学特性解。因此该近似求解中面最大位移为 $w^0 = \frac{5}{384}\frac{PL_x^4}{D_{11}}$(orthotropic long-plate approximation,OLA 法)。正交层合板中面最大位移 w^0 分析结果如图 2 所示。

从图 2 中可以发现,FEM 得到最大位移解 w^0 均在解析解 5% 误差范围内,且随长宽比 A_R 增大,两者误差趋于稳定一致;3 种铺层方案中,当 A_R 不同时 FEM 得到位移解与解析解误差表现不一:表 3 的 2 号铺层中整体 FEM 与解析解 w^0 误差最小,最大误差在 $A_R = 10$ 处为 1.75%;表 3 的 3 号铺层整体最大误差在

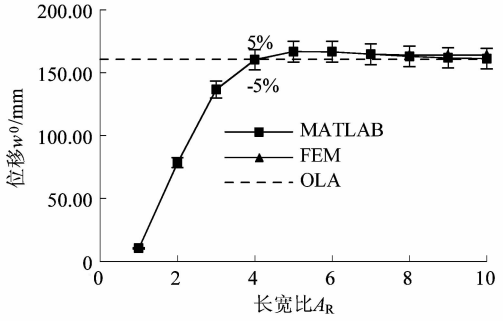
表 3　正交层合板铺层角度与弯曲刚度

Table 3　Orthotropic laminates ply angle and bending stiffness

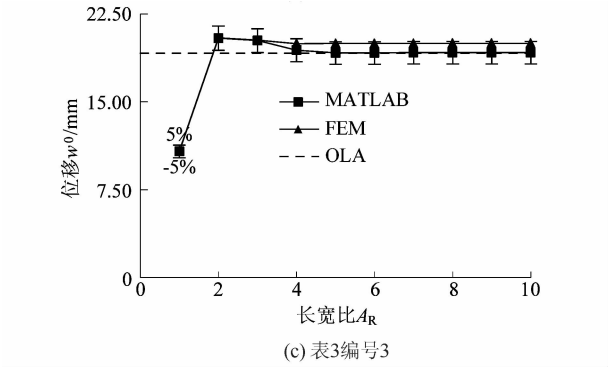
编号	铺层角	弯曲刚度 D_{11}	D_{12}	D_{22}	D_{66}
1	[0/0/0/0/0/0/0/0/0/0]$_s$	99.25	1.94	6.47	3.03
2	[90/90/90/90/90/90/90/90/90/90]$_s$	6.47	1.94	99.25	3.03
3	[0/90/90/0/0/90/90/0/0/90]$_s$	54.25	1.94	51.47	3.03



(a) 表3编号1



(b) 表3编号2



(c) 表3编号3

图 2　正交层合板最大位移 w^0

Figure 2　Maximum displacement w^0 of orthotropic laminates

4.00% 左右,而 1 号铺层整体误差居中,最大误差 2.50% 左右。

图 2 中,正交层合板 OLA 法与 MATLAB 解析法在处理较大 A_R 时,两者中面最大位移解 w^0 误差较小,可由 OLA 法查同性材料设计手册来计算力学特性。表 4 中列出 OLA 法与 MATLAB 解析法在临界 $\frac{L_y}{L_x}=3^4\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$ 处位移值 w^0。可见,当低弯曲刚度 D_{11} 时,w^0 最大位移误差明显加剧,达到了 294.4% 的误差,在临界 A_R 处明显不适用 OLA 法。

表 4　正交层合板 OLA 与 MATLAB 解析解位移 w^0

Table 4　Displacement w^0 of OLA and MATLAB exact solution of orthotropic laminates

编号	弯曲刚度 D_{11}	临界比 $3^4\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$	MATLAB 解析解 w^0/mm	OLA 法 w^0/mm	误差 e_{DIFF}/%
1	99.25	5.93	10.49	10.47	-0.2
2	6.47	1.52	40.72	160.58	294.4
3	54.25	3.04	20.18	19.15	-5.1

3.2　10%原则设计层合板

Tsai 提出的层合板 10% 原则设计更广泛的应用于实际,其没有像正交层合板那样有严格的铺层参数限制。课题组按 $[\Phi_2/[\theta/0/0/\theta]_2]_s$(其中 $\Phi=90+\theta/2$)铺层,Tsai 视该设计层合板性能近似正交层合板,故作正交近似分析(orthotropic approximation,OA)。令 $\theta=15°,30°,45°,60°,75°,90°$时,复合层合板弯曲刚度如表 5 所示。

不同层合板 A_R 下,比较了 FEM 及作近似正交层合板(即令 $D_{16}=D_{26}=0$)分析法和 MATLAB 解析法得到中面最大位移 w^0 解析解。其中 $\theta=15°,45°,90°$的层合板最大位移 w^0 如图 3 所示。

表 5　10% 原则层合板弯曲刚度

Table 5　Bending stiffness of 10% rule laminates

角度 θ/(°)	弯曲刚度 D_{11}	D_{12}	D_{22}	D_{66}	D_{16}	D_{26}
15	49.91	4.62	50.45	5.71	7.20	-5.01
30	40.39	10.51	48.19	11.61	9.42	-6.70
45	31.25	15.20	47.96	16.29	5.52	-5.43
60	27.10	15.99	50.53	17.08	-1.46	-4.20
75	28.59	14.10	52.85	15.19	-7.54	-6.27
90	33.47	12.89	50.36	13.98	-11.32	-11.32

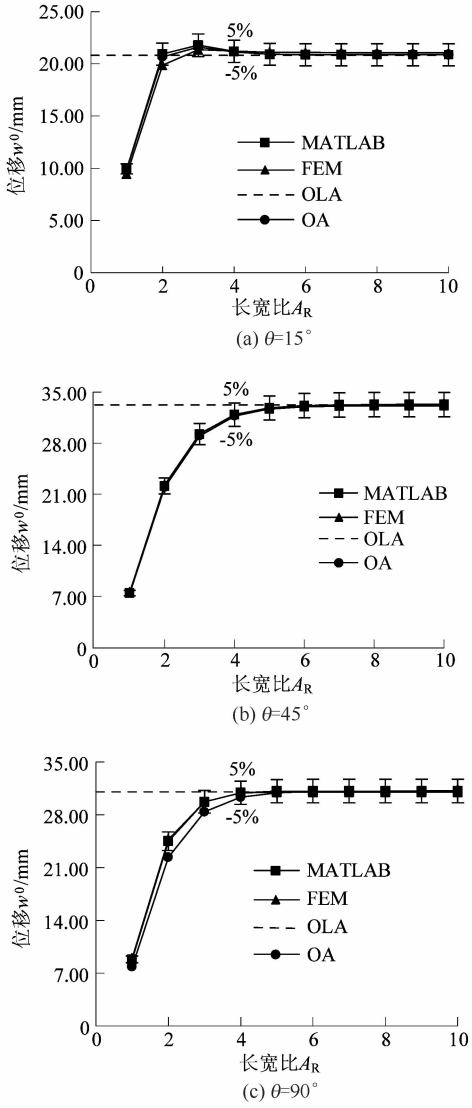


图 3　10% 原则设计层合板最大位移 w^0

Figure 3　Maximum displacement w^0 of 10% rule laminates

6 种不同 θ 铺层角度设计下,FEM 分析得到的中面最大位移 w^0 在 $A_R=1,2$ 时,与解析解误差在 2% 左右,除了 $\theta=15°$, $A_R=1,2$ 时,误差为 5.19% 与

5.07%；在 A_R 大于 3 情况下，则均在 1% 范围内。OA 分析法相较于解析解 w^0 误差基本控制在 2% 内，且在 A_R 大于 3 的情况下，两者基本一致；而在低 A_R 情况下，则表现不一：由于 OA 分析忽略了弯扭耦合刚度效应，对于表 5 中 D_{16}，D_{26} 越大，则两分析法得到的偏差越大，如在 $A_R = 1,2,3$ 情况下，$\theta = 90°$ 时，误差分别为 10.98%，8.67%，4.46%，而在 $\theta = 60°$ 时，误差则为 0.58%，0.29%，0.13%。可见，A_R 大于 3 的情况下，FEM 与 OA 法都可得到近似解析解；A_R 小于 3 时，两种分析法符合精度要求，但对于大弯扭耦合刚度 D_{16}，D_{26} 下，近似作正交层合板（OA）得到的数值解相较于解析解存在较大差距。

图 3 中，OLA 与 MATLAB 分析在较大 A_R 层合板下，两者得到的中面最大位移 w^0 解基本一致。表 6 中列出 OLA 与 MATLAB 解析解在临界 $\frac{L_x}{L_y} = 3\sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$ 处位移值比较。其表现特性与正交层合板分析的结论一致。

表 6 10% 原则设计层合板 OLA 与 MATLAB 解析解 w^0

Table 6 Displacement w^0 of OLA and MATLAB exact solution of 10% rule laminates

角度 θ/(°)	弯曲刚度 D_{11}	临界比 $3\sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{12}}}$	MATLAB 解析解 w^0/mm	OLA 法 w^0/mm	误差 e_{DIFF}/%
15	49.91	2.99	21.78	20.82	-4.4
30	40.39	2.87	25.16	25.72	2.2
45	31.25	2.70	27.78	33.25	19.7
60	27.10	2.57	29.02	38.34	32.1
75	28.59	2.57	29.97	36.34	21.2

4 结论

1）基于 Ritz 法与最小势能原理，推导四边简支对称矩形层合板解析解，经过代数、矩阵处理后，便于 MATLAB 等商业软件编程求解；根据 MATLAB 编程表明，使 I，J 取 25，足以使解析解稳定，获得精确解析解；结合有限元法（FEM）验证了有限元模型有效性。

2）OLA 法与 MATLAB 解析解对比发现，正交层合板与 10% 原则设计层合板在低弯曲刚度 D_{11} 下，最大位移 w^0 误差加剧，该刚度下的临界 A_R 处并不适用 OLA 法，而在大 A_R 时，结果则一致。

3）正交层合板中，FEM 与解析解 w^0 误差均在 5% 范围内；且随长宽比 A_R 增大，两者误差趋于稳定与一致。

4）10% 原则设计层合板中，A_R 大于 3 的情况下，FEM 与 OA 法得到 w^0 与解析解一致；A_R 小于 3 时，两种分析法符合工程需求；但于大弯扭耦合刚度下，OA 法解相较于解析解存在较大误差。

参考文献：

[1] 岳珠峰，王富生，王佩艳，等. 飞机复合材料结构分析与优化设计[M]. 北京：科学出版社，2011：1－3.

[2] KOLLAR L P, SPRINGER G S. Mechanics of composite structures [M]. 1st. New York：Cambridge University Press，2003：89－90.

[3] 袁坚峰，尼早，陈保兴. 弯剪复合载荷作用下复合材料层合板屈曲的强度校核方法[J]. 复合材料学报，2014，31(1)：235－240.

[4] LOPATIN A V, MOROZOV E V. Buckling of the SSFF rectangular orthotropic plate under in-plane pure bending [J]. Compositae structure，2009，90(3)：287－294.

[5] ABEDI M, JAFARI-TALOOKOLAEI R, VALVO P S. A new solution method for free vibration analysis of rectangular laminated composite plates with general stacking sequences[J]. Computers and structures，2016，175：144－156.

[6] RAHMANI B, SHENAS A G. Robust vibration control of laminated rectangular composite plates in hygrothermal and thermal environment [J]. Compositae structure，2017，179：665－681.

[7] YE Yuan, XU Chengliang, XU Tining, et al. An analytical model for deformation and damage of rectangular laminated glass under low-velocity impact[J]. Computers and structures，2017，176：833－843.

[8] TIMOSHENKO S P, KRIEGER S. Theory of plates and shells[M]. 2nd. New York：McGraw-Hill，1959：366－367.

[9] VERES I, KOLLAR L P. Buckling of orthotropic plates with different edge supports[J]. Journal of composite materials，2001，35(3)：625－635.

[10] WHITNEY J M. Structural analysis of laminated anisotropic plates [C]. International Conference on Composite Materials. Dayton：University of Zaragoza，1987：113－118.

[11] TSAI S W, HAHN H T. Introduction to composite materials[M]. 1st. Westport Conn：Technomic Publishing Co Inc.，1980：249－256.

[12] VERES I, KOLLAR L P. Approximate analysis of mid-plane symmetric rectangular composite plates[J]. Journal of composite materials，2002，36(6)：673－682.