

[研究·设计]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2018.06.007

曲柄群机构自由度计算的旋量法

刘言松, 曹巨江, 梁金生, 张艳华, 闫茹

(陕西科技大学机电工程学院, 陕西 西安 710021)

摘要:由于曲柄群机构的曲柄个数和任意2个曲柄间连杆个数的不确定性,传统方法计算该机构的自由度会遇到虚约束判断等问题。课题组在分析了曲柄群机构基本单元运动特性的基础上,定义了连杆桁架;基于连杆桁架的概念,总结了不同拓扑结构形式的曲柄群机构在结构上的统一性;利用旋量理论计算了含任意多个曲柄的曲柄群机构的公共约束数及冗余约束数,并计算得出含任意多个曲柄的曲柄群机构自由度。计算结果表明,利用旋量理论和连杆桁架概念简化了曲柄群机构的构件数,避免了繁琐的计算。研究实现了对含任意多个曲柄的曲柄群机构自由度计算的统一。

关键词:曲柄群机构;自由度;旋量;连杆桁架

中图分类号:TH112

文献标志码:A

文章编号:1005-2895(2018)06-0033-03

Computing Method of DOF of Crank Group Mechanism Based on Screw Theory

LIU Yansong, CAO Jujiang, LIANG Jinsheng, ZHANG Yanhua, YAN Ru

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China)

Abstract: Because of the uncertainty of the numbers of cranks and the numbers of connecting rods between cranks in crank group mechanism, there must be some problems such as virtual constraint determination with traditional method to calculate DOF of the mechanism. The connecting truss was defined by analyzing the kinematics of the basic unit of multi parallelogram mechanism, and summarized the unity in the structure multi parallelogram mechanism with different topological structure. The calculation method was given for the number of the public constraints, that of the redundant constraints, and the DOF of multi parallelogram mechanism with any number of crank by screw theory. The results show that the method simplifies the numbers of the mechanism members, avoids the tedious calculations and achieves the unified description of DOF of crank group mechanism with multiple crank based on the connecting truss and the screw theory.

Keywords: crank group mechanism; DOF (degree of freedom); screw theory; connecting truss

曲柄群机构在专用钻床^[1]、包装设备和印刷机械等需要实现平行轴同步传动的场合应用较为广泛^[2-4]。在曲柄群机构中,所有曲柄具有相同的长度和运动相位,任意2个曲柄及相应的连杆均构成一个平行四边形机构^[5-7]。因此曲柄群机构是一种平面机构。在对平面机构的自由度计算时,通常应考虑复合铰链、局部自由度及虚约束^[8]等因素。在不同的工作场合,曲柄个数及两曲柄之间的连杆个数会不同,复合铰链、虚约束以及有效构件数等的判定较为复杂,因此使用常

规方法如契贝舍夫公式计算曲柄群机构的自由度较为困难^[9]。对于修正的 Grübler-Kutzbach (简称 G-K) 公式的正确性,黄真、蔡汉忠等均在理论和实例应用上给予了证明^[10-11],但是对于含有个数不定,连杆连接形式复杂的曲柄群机构,修正的 G-K 公式在计算机构自由度时仍然较为繁琐。鉴于此,课题组通过分析曲柄群机构基本单元的运动特点,提出连杆桁架的概念,简化曲柄群机构的形式,结合旋量理论再利用 G-K 公式对曲柄群机构的自由度进行统一描述。

收稿日期:2018-07-23;修回日期:2018-08-29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51175313);陕西省教育厅专项科研计划项目(17JK0099)。

第一作者简介:刘言松(1975),男,安徽凤阳人,博士,主要研究方向为自动机械设计及理论。E-mail:yansong_liu@qq.com

1 曲柄群机构的简化

根据曲柄群机构的定义,其示意图如图1所示。

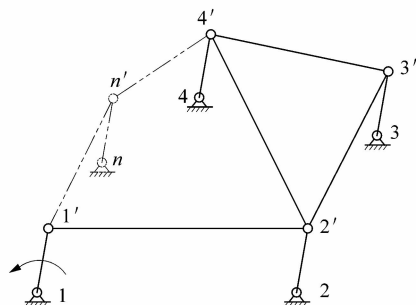


图1 曲柄群机构示意图

Figure 1 Diagram of crank group mechanism

平行四边形机构为曲柄群机构的基本单元,如单元11'2'2'。如果曲柄11'为主动曲柄,角速度为 ω ,则曲柄22'的角速度也为 ω ,连杆1'2'的角速度为0,其上任意一点的速度分量可用式(1)表示^{[8]61}。

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -r_0 \omega \sin \theta; \\ v_y &= r_0 \omega \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: r_0 为主动曲柄长度; θ 为主动曲柄转角。

式(1)表示,在平行四边形中,所有连杆都作平动,其速度只与完全主动曲柄的长度 r 及角速度 ω 相关。基于曲柄群机构的特点,所有连杆的运动状态完全相同,因此可将所有连杆视为一个桁架,即连杆桁架,这样曲柄群机构的简图可表示为图2所示的形式。

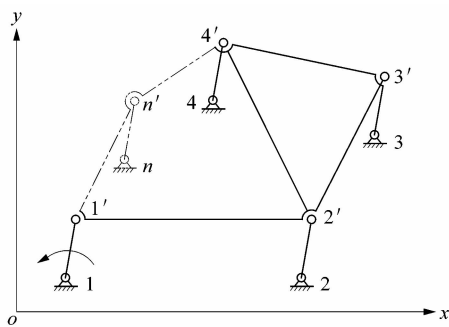


图2 简化的曲柄群机构示意图

Figure 2 Diagram of simplified crank group mechanism

连杆桁架的定义将曲柄群机构的构件数简化为 $(p+2)$,其中 p 为曲柄个数,且简化后的曲柄群机构的每个铰接点均不存在复合铰链。更为重要的是,引入连杆桁架概念后,曲柄群机构即可视为一个简单的并联机构,其中连杆桁架为动平台,机架为静平台,每一个曲柄为一个并联机构运动支链,可以利用旋量理论描述该机构的运动和约束,简化自由度的计算过程。

2 曲柄群机构的运动旋量系与约束旋量系

2.1 旋量理论简介

在空间机构学中,任何转动副都可以用旋量表示为^[12]

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S}_0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

式中: $\mathbf{S}$ 为转动副的方向矢量, $\mathbf{S}_0$ 为 $\mathbf{S}$ 的线矩, $\mathbf{S}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{S}$,其中, $\mathbf{r}$ 为 $\mathbf{S}$ 的位置矢量,且有 $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}_0 = 0$ 。

若2个旋量的互易积为零,即

$$\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2 = 0. \quad (3)$$

式(3)表示2个旋量互为反旋量。2个互为反旋量的旋量在机构中的意义为,如果其中一个旋量表示物体的运动,则另一个旋量表示物体受到的约束。

2.2 曲柄群机构的运动旋量系和约束旋量系

参考图2,由于连杆桁架的存在,曲柄群机构可以视为一个并联机构,则任意一个曲柄 $nn' = 0$ 都是一个运动支链。设曲柄固定回转中心 n 在坐标系 xoy 中的坐标为 (x_n, y_n) ,曲柄与连杆桁架铰接点 n' 相对于 n 点的坐标为 (x_0, y_0) ,则支链 nn' 上的2个转动副的运动旋量构成一个运动旋量系,即

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_n &= (0 \ 0 \ 1; y_n \ -x_n \ 0); \\ \mathcal{S}_{n'} &= (0 \ 0 \ 1; y_n + y_0 \ -x_n - x_0 \ 0). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

设上述运动旋量系的任意反螺旋为:

$$\mathcal{S}^r = (L^r \ M^r \ N^r; P^r \ Q^r \ R^r),$$

其中: $(L^r \ M^r \ N^r)$ 为 $\mathcal{S}^r$ 的方向矢量; $(P^r \ Q^r \ R^r)$ 为 $\mathcal{S}^r$ 的线矩。即

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}^r &= 0; \\ \mathcal{S}_{n'} \circ \mathcal{S}^r &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

也就是

$$\left. \begin{aligned} R^r + L^r y_n - M^r x_n &= 0; \\ R^r + L^r (y_n + y_0) - M^r (x_n + x_0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)的所有解旋量构成了式(4)表示的运动旋量系的反旋量系,即

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_1^r &= (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0); \\ \mathcal{S}_2^r &= (0 \ 0 \ 1; 1 \ 0 \ 0); \\ \mathcal{S}_3^r &= (0 \ 0 \ 1; 0 \ 1 \ 0); \\ \mathcal{S}_4^r &= (x_0 \ y_0 \ 0; 0 \ 0 \ x_n y_0 - y_n x_0). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

对于机构而言,运动旋量系的反旋量系即为该机构的约束旋量系。

3 曲柄群机构的自由度

曲柄群机构的自由度可以通过修正的G-K公式计算^[13]:

$$M = d(m - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + v. \quad (8)$$

式中: M 为机构自由度; d 为机构阶数, $d = 6 - \lambda$, λ 为机构的公共约束数; m 为机构的构件数; g 为机构运动副的数目; f_i 为第*i*个运动副的自由度数。

对于用旋量描述的并联机构,其公共约束数 λ 为每个运动支链提供给动平台的相同的约束旋量。从式(7)可以看出,在每个运动支链提供给动平台的约束旋量系中,前3个旋量完全相同,第4个旋量与运动支链的位置有关。因此,对于包含 p 个运动支链,即含有 p 个曲柄的曲柄群,其公共约束数为 $\lambda = 3$,因此,

$$d = 6 - \lambda = 6 - 3 = 3. \quad (9)$$

当引入连杆桁架概念后,

$$m = p + 2. \quad (10)$$

对于含 p 个曲柄的曲柄群机构,有

$$g = 2p. \quad (11)$$

曲柄群机构中运动副均为转动副,因此 $f_i = 1$,则

$$\sum_{i=1}^g f_i = 2p. \quad (12)$$

v 为机构的并联冗余约束数^[14], $v = t - k$ 。其中 $t = qp - \lambda p$,为所有运动支链提供给动平台的总的约束数,去除表现为公共约束的约束总数后的冗余约束的数目, q 为每个分支的约束数(即每个分支约束旋量系对应矩阵的秩), k 为 t 个约束中的独立约束数。式(7)为每个运动支链对动平台的约束旋量系,且其秩为4,因此每个支链都具有4个线性无关的约束旋量,即所有支链对动平台的总约束数为 $qp = 4p$ 。从式(7)可知,每个运动支链4个约束中前3个约束表现为公共约束,因此机构中表现为公共约束的总的约束数为 $\lambda p = 3p$ 。剩余的约束数为 $t = qp - \lambda p = p$ 。由这 p 个约束构成的约束旋量系如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s}_1^r &= (x_0 \ y_0 \ 0; 0 \ 0 \ x_1 y_0 - y_1 x_0); \\ \mathbf{s}_2^r &= (x_0 \ y_0 \ 0; 0 \ 0 \ x_2 y_0 - y_2 x_0); \\ \mathbf{s}_3^r &= (x_0 \ y_0 \ 0; 0 \ 0 \ x_3 y_0 - y_3 x_0); \\ &\dots \\ \mathbf{s}_p^r &= (x_0 \ y_0 \ 0; 0 \ 0 \ x_p y_0 - y_p x_0). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其秩为2,即在去除表现为公共约束的旋量后,剩余的所有约束实际上构成了一个2系旋量,即 $k = 2$ 。则曲柄群机构的并联冗余约束为:

$$v = t - k = p - 2. \quad (14)$$

将式(9)~(11)、式(12)和式(14)代入式(8)得

$$M = 1, \quad (15)$$

即对于含有任意多个曲柄的曲柄群机构,其自由度总为1。

4 结语

通过对曲柄群机构中连杆的运动分析,将所有连杆简化为连杆桁架,此时曲柄群机构可视为一个并联机构,为后续的自由度分析提供了理论基础。运用旋量理论分析了曲柄群机构的公共约束数、阶数及并联冗余约束数的计算方法。通过旋量理论对曲柄群机构的自由度进行计算,结果显示,曲柄群机构的自由度为1,从理论上证明了曲柄群机构的运动可行性;且在任意一个曲柄输入一个独立的转动,则该机构就具有确定的运动。

参考文献:

- [1] 陆文欣. 曲柄传动多轴箱单连杆多曲柄机构的设计与应用[J]. 常州工学院学报, 1996, 9(2): 46-51.
- [2] 汪玉琪, 曹巨江. 曲柄群驱动机构的运动特点研究[J]. 机械传动, 2013, 37(10): 79-81.
- [3] 任升, 曹巨江, 刘言松, 等. 曲柄群驱动机构单元化平衡[J]. 轻工机械, 2015, 33(1): 8-10.
- [4] BARTON L O. Mechanism analysis of a trisector[J]. Mechanism & machine theory, 2008, 43(2): 115-122.
- [5] 汪玉琪, 曹巨江. 曲柄群驱动机构概述[J]. 机械传动, 2013, 37(4): 134-136.
- [6] 柳志远, 冯占广. 小型单缸卧式发动机一阶往复惯性力整体平衡法的理论研究[J]. 农业机械学报, 1990, 21(1): 23-28.
- [7] 任升, 曹巨江. 基于并联机构理论的曲柄群驱动机构的自由度分析[J]. 机械设计与研究, 2014, 30(4): 14-16.
- [8] 马履中, 谢俊, 尹小琴. 机械原理与设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 2015: 18.
- [9] 韩青. 一种新的平面机构自由度通用计算公式[J]. 机械传动, 2015, 39(3): 153-157.
- [10] 黄真, 刘婧芳, 曾达幸. 基于约束螺旋理论的机构自由度分析的普遍方法[J]. 中国科学, 2009, 39(1): 84-93.
- [11] 蔡汉忠, 欧阳富, 廖明军. 机构结构新旧自由度计算公式对比之应用研究[J]. 中国机械工程, 2011, 22(1): 35-38.
- [12] 郭盛, 方跃法, 岳聪. 基于螺旋理论的单闭环多自由度过约束机构综合[J]. 机械工程学报, 2009, 45(11): 38-45.
- [13] 卢文娟, 张立杰, 曾达幸, 等. 新的机构自由度计算公式: GOM 公式的应用研究[J]. 中国机械工程, 2014, 25(17): 2283-2289.
- [14] 黄真. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014: 122.