

[研究·设计]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2020.01.003

# 磁流变液剪切屈服应力计算模型

陈亚蒙, 罗一平\*, 任洪娟, 魏丹, 康路路

(上海工程技术大学机械与汽车工程学院, 上海 201620)

**摘要:** 为了提升磁流变液剪切屈服应力计算的准确性, 课题组以麦克斯韦应力张量理论为基础, 从微观角度考虑非线性磁化过程从而建立磁流变液链状模型。以 MRF-122EG 和 MRF-132LD 磁流变液 2 种液体样本为研究对象, 通过 ANSOFT 软件进行磁场仿真并得出 2 种样品的屈服应力。结果显示: MRF-122EG、MRF-132DG 样品的屈服应力与 Lord 公司提供的对应技术参数的最大相对误差分别约为 6% 和 9%, 属于实验允许的范围, 说明该理论模型具有合理性。该研究也为磁流变液剪切屈服应力计算提供一种实用的方法。

**关键词:** 磁流变液; 剪切屈服应力; 麦克斯韦理论; 磁流变液链状模型; ANSOFT 软件; 非线性磁化

中图分类号: TH140; TM271 文献标志码: A 文章编号: 1005-2895(2020)01-0012-06

## Shear Yield Stress Model of Magnetorheological Fluid

CHEN Yameng, LUO Yiping\*, REN Hongjuan, WEI Dan, KANG Lulu

(School of Mechanical and Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

**Abstract:** In order to improve the accuracy of the calculation of shear yield stress of magnetorheological fluids, a chain model of magnetorheological fluids was established based on Maxwell theory considering the non-linear magnetization process from the microcosmic aspect. Two kinds of magnetorheological liquid samples, MRF-122EG and MRF-132LD, were taken as the research object. The magnetic field simulation was carried out by ANSOFT software and the yield stress of the two samples was obtained. The results show that the maximum relative error between the yield stress values of MRF-122EG and MRF-132DG and the corresponding technical parameters provided by Lord is about 6% and 9%, respectively, which is within the experimental allowable range, indicating that the theoretical model has rationality. This study also provides a practical method for calculating the shear yield stress of the magnetorheological fluid.

**Keywords:** magnetorheological fluid; shear yield stress; Maxwell Theory; magnetorheological fluids chain model; ANSOFT; nonlinear magnetization

剪切屈服应力是磁流变液最重要的性能指标之一, 剪切屈服应力的大小决定了磁流变液传动装置传递扭矩的大小, 因此精确测量屈服应力是磁流变液在各个工程领域得到广泛应用的前提<sup>[1-6]</sup>。为了客观地评价磁流变液的流变学特性, 首先应准确地测量磁流变液(MRF)的剪切屈服应力。Bingham 模型是最早被广泛应用的磁流变液本构模型, 而 Bivisous 模型<sup>[7]</sup>、Eyring 模型<sup>[8]</sup>和 Herschel-Bulkey 模型<sup>[9-10]</sup>等都是在 Bingham 模型的基础上发展而来。在各种屈服应力计算模型的基础上, 如何精确计算磁流变液的屈服应力

吸引了众多国内外学者研究。经典偶极子模型<sup>[11]</sup>表达式简洁、计算便捷, 适用于磁性粒子间距较大时, 而当磁性粒子间距较小时, 计算误差大。局部场偶极子模型<sup>[12]</sup><sup>300</sup>因考虑了其它磁性粒子因素, 计算准确度提高; 当应用在磁性粒子间距非常小的条件下时, 磁偶极矩受其它磁性粒子影响会发生偏离中心现象, 有违模型的前提假设, 模型发生失真。陈慧余等<sup>[13]</sup>在研究磁流变液流变特性时建立了纤维束模型, 该模型把磁流变液看成是磁性粒子形成的许多串束, 在 2 个磁极之间有许多磁链(类似纤维束结构), 磁链之间存在包含

收稿日期: 2019-06-28; 修回日期: 2019-10-20

基金项目: 上海地方能力建设基金项目(19030501100)。

第一作者简介: 陈亚蒙(1994), 女, 安徽宿州人, 硕士, 主要研究方向为智能材料。E-mail: cymn0423@163.com

基础液的间隙。磁链和基础液之间相互作用,使得纤维束被粘黏在一起。基于该模型算出磁流变液与2磁极之间的正压力。Rosenweig等<sup>[14]</sup>把磁流变液假设为具有各向同性、磁化率和屈服应力的单一固体,提出了平均场连续模型。田祖织等<sup>[12]301</sup>在考虑磁饱和的基础上提出一种分裂偶极子模型,该模型适用于中强磁场,当外加磁场较小时,分裂偶极子模型中心线磁场误差大于20%,此时模型不再适用。Tang等<sup>[15]</sup>从二维层状结构入手,利用Maxwell应力张量理论,对链进行应力分析,考虑粒子的磁饱和效应和磁场集中效应,分析得出磁流变液屈服应力计算公式。关于极化小球模型,其前提假设是磁性粒子只能形成单链解(isolated chain),与电流变中点偶极子模型有一定的共同点,粒子间的作用力利用磁荷来计算。Lemaire等<sup>[16]</sup>利用类似电极化小球法得到磁偶极子作用力表达式,获得某磁流变液样品的屈服应力;但是该模型未涉及磁性粒子磁化的非线性特征,导致计算结果误差很大。彭小强等<sup>[17]</sup>采用分段建模的方法建立微观机械流体动力学模型,在考虑磁场强度、体积分、温度等因素的基础上得到的计算结果接近实验结果。

综合以上分析结果可以看出,目前的理论模型虽取得一定的进展,但仍然存在着一些不完善的地方。当磁性颗粒间距较小时,经典偶极子模型计算误差大;在磁性颗粒间距小的情况下,局部场偶极子模型会发生失真;当外加磁场较小时,分裂偶极子模型不再适用;Lemaire及Rosenweig等在理想的假设前提下未考虑磁性颗粒的非线性磁化过程。为准确求解磁流变液剪切屈服应力,课题组首先利用麦克斯韦应力张量方程,从磁流变液的微结构出发,并考虑非线性磁化过程,对MRF-122EG和MRF-132LD的2种不同型号磁流变液的屈服应力进行理论计算;其次,结合有限元软件Ansoft对磁流变液样品进行磁场仿真,得到具体磁感应强度下的磁场分布;再通过MATLAB软件对剪切应力进行拟合,得到剪切应力与剪应变的关系图;最后将结果与Lord公司提供的技术参数进行对比,验证该模型是否合理。

## 1 磁流变液链状模型

### 1.1 麦克斯韦理论<sup>[17]</sup>

对于研究磁流变液剪切屈服应力,针对各向同性的传递介质,条件如下:

$$\left. \begin{aligned} D &= \varepsilon \varepsilon_0 E; \\ B &= \mu \mu_0 H; \\ j_0 &= \sigma E. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $D$ 表示电位移; $j_0$ 表示传导电流密度; $\varepsilon$ 表示相对介电常数; $\mu$ 表示相对磁导率; $\sigma$ 表示相对电导率; $\varepsilon_0$ 表示真空介电常数; $\mu_0$ 表示真空磁导率; $H$ 表示磁场强度。

当求解空间介质密度为 $\rho$ ,相对磁导率和相对介电常数分别为 $\mu$ 和 $\varepsilon$ ,电场强度和磁感应强度分别为 $E$ 和 $B$ ,此时电磁场作用在单位介质上的作用力即为电磁场体积力:

$$f_{em} = \nabla \cdot \left\{ \varepsilon \varepsilon_0 E E + \mu \mu_0 H H - \frac{1}{2} (\varepsilon \varepsilon_0 E^2 + \mu \mu_0 H^2) \vec{S} \right\} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E \times H. \quad (2)$$

令

$$\vec{\Phi} = \varepsilon \varepsilon_0 E E + \mu \mu_0 H H - \frac{1}{2} (\varepsilon \varepsilon_0 E^2 + \mu \mu_0 H^2) \vec{S}; \quad (3)$$

$$G = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 E \times H. \quad (4)$$

则有

$$f_{em} = \nabla \cdot \vec{\Phi} - \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (5)$$

式中 $\vec{\Phi}$ 即为麦克斯韦应力张量(Maxwell stress tensor)。

在空间任意区域 $V$ 对式(5)进行积分得:

$$F = \int_V f_{em} d\tau = \oint_S dS \cdot \vec{\Phi} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V G dV. \quad (6)$$

式中: $\oint_S dS \cdot \vec{\Phi}$ 表示外场对内场的作用力; $\vec{n} \cdot \vec{\Phi}$ 表示单位分界面上外场对内场施加的应力; $\vec{n}$ 表示分界面上向外法线的方向。

### 1.2 磁流变液链状模型

如图1所示,在无磁场作用条件下,粒子呈分散状分布于磁流变液中,而在磁场作用下,粒子形成链状结构分布于磁流变液中。

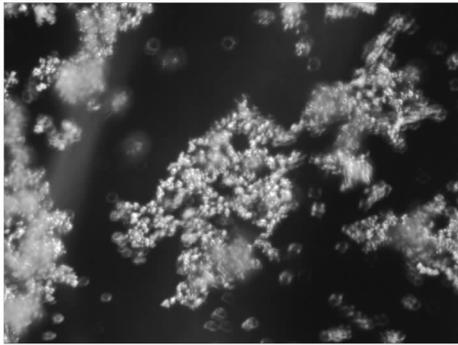
课题组针对磁流变液的特点,并考虑其非线性磁化过程,构造出磁流变液链状模型。假设在零场时呈均匀状态且具有各向同性,在磁场作用时粒子均匀地形成多条单链。从长链中提取单个小球单元体,对单元体进行受力分析,单元体只受上下相邻粒子的作用且受力对称,如图2所示。

由图2可知,为了结构的对称性,把磁性粒子周围的基础液看成圆柱状,柱高 $2h$ ,圆柱半径为 $W$ ,粒子半径为 $R$ ,则MRF的体积分率为:

$$\Phi = 4\pi R^3 / (3 \times 2\pi W^2 h). \quad (7)$$

单元体磁场边界条件为:

$$H_r = 0 (Z = 0, Z = 2h, r = W). \quad (8)$$



(a)无外加磁场作用



(b)外加磁场作用

图1 磁流变液在有磁场和无磁场作用下的状态  
Figure 1 State of MRF under magnetic field and no magnetic field

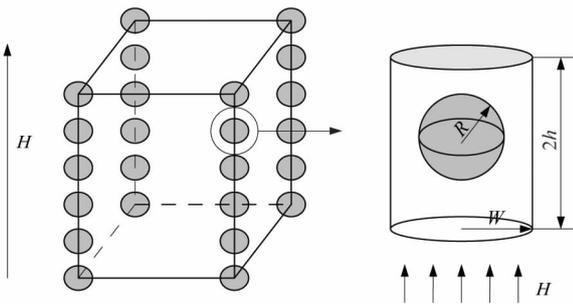


图2 MRF链状模型  
Figure 2 Chain model of MRF

式中: $Z$ 代表图2中圆柱体与水平方向平行的面; $r$ 表示圆柱体的半径; $H_r$ 表示在 $Z=0$ 的平面上半径为 $r$ 的圆柱体所受的磁场强度。

对于磁感应强度和磁场强度,在磁性粒子和传递介质交界面上,磁感应强度和磁场强度分别为法向、切向连续,所以得:

$$(B_2 - B_1) \cdot n = 0; \quad (9)$$

$$n \times (H_2 - H_1) = 0. \quad (10)$$

式中: $B_1$ 和 $B_2$ 表示磁感应强度法向方向的值; $H_1$ 和 $H_2$ 代表磁场强度切向方向的值; $n$ 代表各方向单位向量。

在 $Z=2h$ 面上,单元体受力为:

$$F = \int n \cdot \left\{ \mu\mu_0 \left( HH - \frac{1}{2} H^2 \vec{S} \right) ds \right\} =$$

$$\frac{\mu\mu_0}{2} \int_0^W 2\pi r [H_z - H_0]^2 dr. \quad (11)$$

式中: $H_0$ 表示外磁场强度; $H_z - H_0$ 表示磁性粒子产生的附加磁场。

通常情况下,外磁场强度等于圆柱高的1/2倒数乘以磁场强度在 $Z$ 轴方向上 $0 \sim h$ 的积分。

当颗粒链发生剪切时,剪切后链的轴线与原轴线夹角为 $\theta$ ,可得剪切应变为 $\gamma = \tan \theta$ ,此时,2颗粒间距为 $2h = 2R \sec \theta = 2R(1 + \gamma^2)^{1/2}$ 。

联立式(7)~(11),得到屈服应力

$$\tau = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \frac{F}{\pi W^2}. \quad (12)$$

通过式(12)可知屈服应力与剪切应变之间的关系,结合有限元方法即可得到屈服应力的数值解。

## 2 仿真结果与分析

### 2.1 选取计算对象

依据 Lord 公司提供的 MRF-122EG 和 MRF-132DG 2 种型号磁流变液的技术参数,课题组针对 MRF-122EG 和 MRF-132DG 的屈服应力进行计算分析,并将计算结果与 Lord 公司提供的技术参数进行比较分析来验证屈服应力理论计算公式的误差范围。

### 2.2 数据处理

Lord 公司的 MRF-122EG 和 MRF-132DG 型号磁流变液原始技术参数如图 3~4 和表 1 所示。

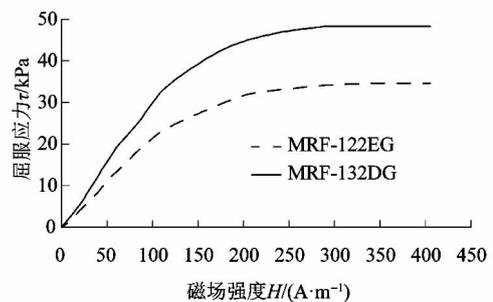


图3 MRF-122EG 和 MRF-132DG 的屈服应力-磁场强度曲线

Figure 3 Yield curve stress-magnetic field strength of MRF-122EG and MRF-132DG

表1 磁流变液技术参数  
Table 1 Technology parameters of MRF

型号	基础液	密度/(cm <sup>3</sup> )	质量分数/%	颜色	黏度/(Pa·s)	温度/°C
MRF-122EG	CH	2.28 ~ 2.48	72.00	黑灰色	0.042 ± 0.020	-40 ~ 130
MRF-132DG	CH	2.98 ~ 3.18	80.98	黑灰色	0.092 ± 0.015	-40 ~ 130

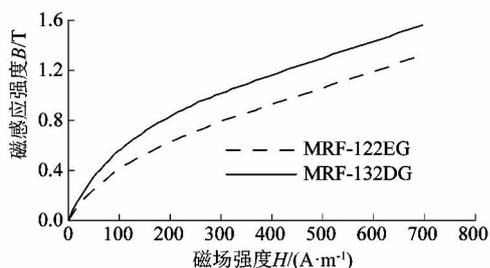


图4 MRF-122EG 和 MRF-132DG 的 B-H 曲线

Figure 4 B-H curve of MRF-122EG and MRF-132DG

由于需要验证的是磁流变液屈服应力与磁感应强度的趋势,所以需要在上图进行处理,为了数据预处理结果的准确性,利用 GetData Graph Digitizer 软件对屈服应力-磁场强度曲线和 B-H 曲线进行坐标提取,通过对 MRF-122EG 和 MRF-132DG 屈服曲线坐标数据和 B-H 曲线坐标数据进行提取,得到结果如图 5 所示。

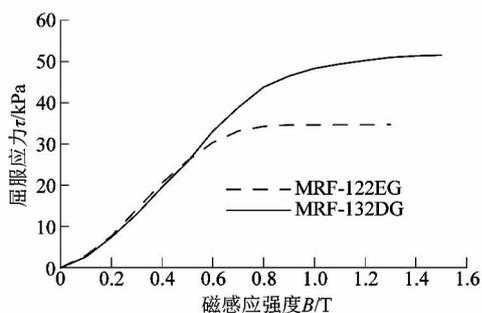


图5 Lord 公司 MRF-122EG 和 MRF-132DG 的屈服应力-磁感应强度曲线

Figure 5 Yield stress-magnetic induction strength curve of MRF-122EG and MRF-132DG of Lord Company

### 2.3 计算结果分析

首先以 MRF-122EG 为例进行计算过程分析,图 2 所示的磁流变液单元体为圆柱体,具有轴对称特性,利用 ANSOFT 软件将单元体中轴线的剖面进行二维静磁场仿真分析,MRF-122EG 的 B-H 曲线如图 4 所示。在 ANSOFT 软件中分别将单元体置于磁感应强度为 0.15 和 0.40 T 的条件下,磁场分布如图 6 和图 7 所示。

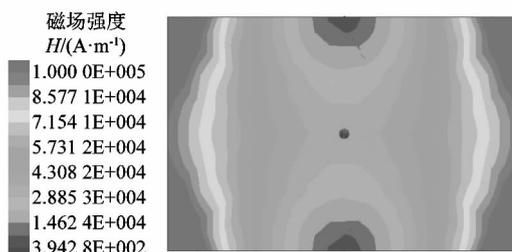


图6 磁感应强度为 0.15 T 时单元体的磁场分布

Figure 6 Magnetic field distribution of element at B = 0.15 T

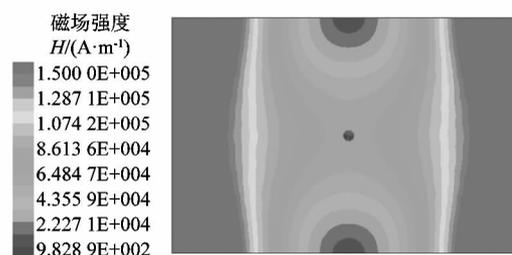


图7 磁感应强度为 0.40 T 时单元体的磁场分布

Figure 7 Magnetic field distribution of element at B = 0.40 T

对单元体中磁性颗粒位置的磁场进行提取,当磁感应强度为 0.15 T 时,对应磁场强度约为  $4 \times 10^4$  A/m, MRF-122EG 对应的磁导率  $\mu$  为  $0.0058 \text{ T} \cdot \text{m/A}$ ; 当磁感应强度为 0.40 T 时,对应磁场强度约为  $9 \times 10^4$  A/m, MRF-122EG 对应的磁导率  $\mu$  为  $0.0042 \text{ T} \cdot \text{m/A}$ ,真空磁导率  $\mu_0$  为  $4\pi \times 10^{-7} \text{ A/m}$ ,联立式(11)和(12)得到剪切应力关系式。

当磁感应强度分别为 0.15, 0.40 T 时,剪切应力分别为:

$$\tau_{0.15} = 5.83 \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}}; \quad (13)$$

$$\tau_{0.40} = 21.38 \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}}. \quad (14)$$

为了得到当磁感应强度分别为 0.15 和 0.40 T 时的磁流变液剪切应力,利用 MATLAB 软件对式(13)和式(14)进行拟合,得到剪切应力与剪应变的关系如图 8 所示。

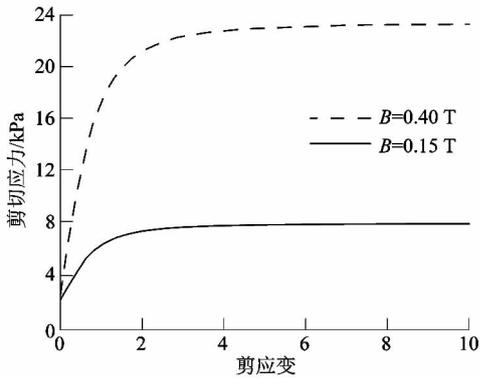


图8 B=0.15 T和B=0.40 T时  
剪切应力与剪应变关系

Figure 8 Shear stress vs. shear strain at  
B = 0.15 T and B = 0.40 T

通过图8可知,在特定磁感应强度条件下,剪切应力随着剪应变的增加而增加,剪切应力到达一定值时不再增加,此值即为对应磁感应强度下的屈服应力。当磁感应强度为0.15和0.40 T时,MRF-122EG的屈服应力分别为6.72和22.54 kPa,以此类推,最终得到MRF-122EG的 $\tau$ -B曲线如图9所示。

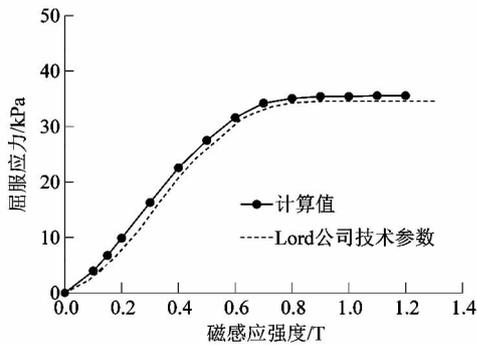


图9 MRF-122EG的屈服应力-  
磁感应强度曲线

Figure 9 Yield stress-magnetic induction  
strength curve of MRF-122EG

MRF-132DG的屈服应力-磁感应强度曲线计算过程同上,结果如图10所示。

通过图9和图10可知,MRF-122EG和MRF-132DG的屈服应力-磁感应强度曲线的计算结果和Lord公司提供的技术参数值较吻合。MRF-122EG曲线的计算值略高于Lord公司提供的技术参数,计算值和Lord公司提供的技术参数值的最大相对误差为6%,说明理论计算公式比较合理。MRF-132DG曲线的计算值在磁感应强度低于0.8 T时略高于Lord公司提供的技术参数,当磁感应强度高于0.8 T时,计算

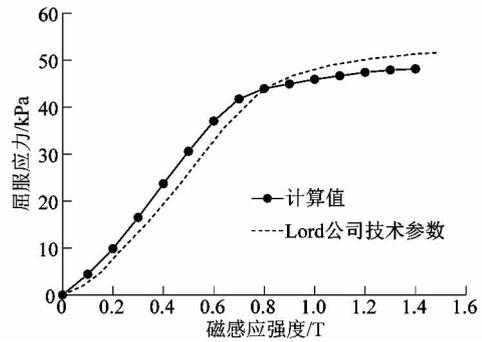


图10 MRF-132DG的屈服应力-  
磁感应强度曲线

Figure 10 Yield stress-magnetic induction  
strength curve of MRF-132DG

值略低于Lord公司提供的技术参数,说明高质量分数的磁流变液在强磁场条件下磁性粒子的内部排斥力明显增大,但计算值和Lord公司提供的技术参数值的最大相对误差为9%,在合理的误差范围内,说明理论计算模型具有可信度。

### 3 结语

课题组依据麦克斯韦应力张量方程构建了磁流变液屈服应力计算模型,以MRF-122EG和MRF-132LD为研究对象,通过对Lord公司提供的技术参数进行提取,得出屈服应力-磁感应强度曲线。在此基础上,借助ANSOFT对MRF-122EG和MRF-132LD进行磁场仿真得到2种样品的屈服应力的计算值。紧接着将计算值与Lord公司提供的屈服应力技术参数进行比较,结果表明MRF-122EG和MRF-132DG的2种磁流变液屈服应力计算值和Lord公司提供的对应技术参数值的最大相对误差分别为6%和9%,说明理论计算模型具有是合理性和可信度。

### 参考文献:

- [1] ZHAO Penghui, FU Yizheng, LI Hailong, et al. Three-dimensional simulation study on the aggregation behavior and shear properties of magnetorheological fluid[J]. Chemical Physics Letters, 2019, 722: 74-79.
- [2] BHATNAGAR R M. A nonlinear transient model for magnetorheological damper response for a time varying field controllable yield shear stress[J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 218, 40(9): 425.
- [3] LEE P H, CHANG J Y. A magnetorheological fluid yield stress measurement platform by movable permanent magnet [C]//Asia-Pacific Magnetic Recording Conference (APMRC). Shanghai: IEEE, 2018: 1.
- [4] WILSON B T, KLINGGENBERG D. A jamming-like mechanism of yield-stress increase caused by addition of nonmagnetizable particles to

- magnetorheological suspensions [J]. *Journal of Rheology*, 2017, 61 (4):601 - 611.
- [5] TIAN Zuzhi. Effect of wall groove characteristics on yield stress measurement of magnetorheological fluid [J]. *Journal of Magnetics*, 2017, 22(2):281 - 285.
- [6] 邢志,吕建刚,李猛. 磁流变液特性分析及实验研究[J]. *磁性材料及器件*, 2005, 36(3):21 - 23.
- [7] 田柳滨,蔡世波,鲍官军,等. 磁流变液柔顺关节的设计和运动学建模研究[J]. *机电工程*, 2017, 34(5):432 - 437.
- [8] BITMAN L, CHOI Y T, WERELEY N M. Electrorheological damper analysis using an Eyring constitutive relationship [J]. *Journal of intelligent material systems and structures*, 2002, 13(10):633 - 639.
- [9] LÜ Hongzhan, CHEN Rui, ZHANG Songsong. Comparative experimental study on constitutive mechanical models of magnetorheological fluids [J]. *Smart Materials and Structures*, 2018, 27(11):115037.
- [10] BAHUDDIN I, MAZLAN S A, SHAPIAI M I, et. al. Constitutive models of magnetorheological fluids having temperature-dependent prediction parameter [J]. *Smart Materials and Structures*, 2018, 27 (9):095001.
- [11] 赵春伟,彭向和. 基于有限元计算的磁流变液特性分析及其与基于磁偶极子模型结果的比较[J]. *功能材料*, 2012, 43(15):2098 - 2101.
- [12] 田祖织,侯友夫. 磁流变液屈服应力计算模型研究[J]. *中国矿业大学学报*, 2012(2):299 - 309.
- [13] 陈慧余,李志超,张培强. 磁流变液的纤维束模型和实验[J]. *实验力学*, 2000, 15(4):361 - 365.
- [14] ROSENSWEIG R E. On magnetorheology and electrorheology as states of unsymmetric stress [J]. *Journal of Rheology*, 1995, 39(1/2):179.
- [15] TANG X, CHEN Y, CONRAD H. Structure and interaction force in a model magnetorheological system [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1996, 7(5):517 - 521.
- [16] LEMAIRE E, BOSSIS G, VOLKOVA O. Deformation and rupture mechanisms of ER and MR fluids [J]. *International Journal of Modern Physics B*, 1996, 10(23/24):3173 - 3180.
- [17] 彭小强,尤伟伟,石峰. 磁流变液剪切屈服应力模型的理论分析与实验[J]. *国防科技大学学报*, 2006, 28(4):110 - 114.

—————  
 (上接第4页)

- [17] 韩云,吕根来,张平. 7050 铝合金切削力预测模型构建及切削参数优化[J]. *兵器材料科学与工程*, 2016, 39(4):13 - 15.
- [18] PATURI U M R, NARALA S K R, PUNDIR R S. Constitutive flow stress formulation, model validation and FE cutting simulation for AA7075-T6 aluminum alloy [J]. *Materials Science & Engineering: A*, 2014, 605:176 - 185.
- [19] LASEMI A, XUE Deyi, GU Peihua. Recent development in CNC machining of free form surfaces: a state-of-the-art review [J]. *Computer-Aided Design*, 2010, 42(7):641 - 654.
- [20] ADEORO O B, SIM W M, WEN P H. An improved prediction of stability lobes using nonlinear thin wall dynamics [J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2010, 210(6/7):969 - 979.

—————  
 (上接第11页)

- [13] WANG Keyong, LI Peichao, WANG Dazhong. Trefftz-type FEM for solving orthotropic potential problems [J]. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2014, 11(14):2537 - 2554.
- [14] WANG Hui, QIN Qinghua, AROUNSAVAT D. Application of hybrid Trefftz finite element method to non-linear problems of minimal surface [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, 69(6):1262 - 1277.
- [15] 刘博,王克用,王明红. 轴对称 Poisson 方程的 Trefftz 有限元解法 [J]. *应用数学和力学*, 2015, 36(2):140 - 148.
- [16] CHENG A H D, CHEN C S, GOLBERG M A, et al. BEM for thermoelasticity and elasticity with body force - a revisit [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2001, 25(4):380.
- [17] 铁摩辛柯,古地尔. 弹性理论 [M]. 徐芝纶,译. 3版. 北京:高等教育出版社, 2013:461 - 464.
- [18] CRUSE T A, SNOW D W, WILSON R B. Numerical solutions in axisymmetric elasticity [J]. *Computers & Structures*, 1977, 7(3):445 - 451.